

第5章 | 指数関数と対数関数



第1節 指数関数

1 指数の拡張

まとめ

1 a^0, a^{-n} の定義 (指数が0や負の整数)

$a \neq 0$ で, n は正の整数とする。

$$a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{とくに} \quad a^{-1} = \frac{1}{a}$$

2 指数法則 (指数が整数)

$a \neq 0, b \neq 0$ で, m, n は整数とする。

$$1 \quad a^m a^n = a^{m+n}$$

$$2 \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$3 \quad (a^m)^n = a^{mn}$$

$$4 \quad (ab)^n = a^n b^n$$

注意 m, n を正の整数とすると、上の指数法則 **1, 3, 4** が成り立つことは、すでに学習している。 a^0, a^{-n} を定義することによって、この法則を満たしながら、指数の範囲を整数全体に拡張したものである。

3 n 乗根

n を正の整数とすると、 n 乗すると a になる数を a の n 乗根 という。すなわち、方程式 $x^n = a$ の解が a の n 乗根である。

4 累乗根

a の 2 乗根, 3 乗根, 4 乗根, ……をまとめて a の 累乗根 という。

正の数 a に対して、 $x^n = a$ を満たす正の数 x がただ 1 つある。

この正の数 x を $\sqrt[n]{a}$ で表す。

$$a > 0 \text{ のとき} \quad \sqrt[n]{a} > 0, \quad (\sqrt[n]{a})^n = a, \quad \sqrt[n]{a^n} = a$$

例 $\sqrt[3]{8}$ は $x^3 = 8$ を満たす正の数 x すなわち $\sqrt[3]{8} = 2$

注意 以下では、正の数 a の n 乗根のうち、正であるものについて考える。

$\sqrt[n]{a}$ は「 n 乗根 a 」と読む。

また、 $\sqrt[n]{a}$ は、ふつう $\sqrt{a}$ と書く。

← 2 乗根すなわち平方根

5 累乗根の性質

$a > 0, b > 0$ で, m, n, p は正の整数とする。

$$1 \quad \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$2 \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$3 \quad (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$4 \quad \sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[np]{a}$$

$$5 \quad \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$$

6 有理数の指数

指数が有理数の場合の累乗の意味を、次のように定める。

$a > 0$ で、 m, n は正の整数、 r は正の有理数とする。

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{とくに} \quad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \quad a^{-r} = \frac{1}{a^r}$$

7 指数法則 (指数が有理数)

$a > 0, b > 0$ で、 r, s は有理数とする。

$$\begin{array}{ll} 1 & a^r a^s = a^{r+s} \\ 2 & \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s} \\ 3 & (a^r)^s = a^{rs} \\ 4 & (ab)^r = a^r b^r \end{array}$$

8 実数の指数

$a > 0$ のとき、 a^r の指数 r は実数にまで拡張することができる。

たとえば、 $\sqrt{2} = 1.4142\cdots$ に対して、累乗の列

$$3^{1.4}, 3^{1.41}, 3^{1.414}, 3^{1.4142}, \dots$$

は、次第に一定の値に近づき、その値を $3^{\sqrt{2}}$ と定めるのである。

9 指数法則 (指数が実数)

指数が実数の場合にも、次の指数法則が成り立つ。

$a > 0, b > 0$ で、 r, s は実数とする。

$$\begin{array}{ll} 1 & a^r a^s = a^{r+s} \\ 2 & \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s} \\ 3 & (a^r)^s = a^{rs} \\ 4 & (ab)^r = a^r b^r \end{array}$$

5 章

指数関数と対数関数

A 整数の指数

教 p.155

練習
1

次の値を求めよ。

$$(1) 4^0 \quad (2) (-5)^0 \quad (3) 3^{-1} \quad (4) 10^{-2} \quad (5) (-2)^{-3}$$

指針 指数が 0 や負の整数の値 a^{-n} の定義に従って書き換える。 $a \neq 0, n$ が正の

整数のとき、 $\frac{1}{a^n}$ は a^n の逆数である。これを a^{-n} と表す。

解答 (1) $4^0 = 1$ 答

(2) $(-5)^0 = 1$ 答

(3) $3^{-1} = \frac{1}{3}$ 答

← 3^{-1} は 3 の逆数を表す

(4) $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$ 答

(5) $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8}$ 答

練習
2

次の式を計算せよ。

$$(1) a^5 a^{-2} \quad (2) \frac{a^{-3}}{a^2} \quad (3) (a^{-4})^{-1} \quad (4) (a^{-2} b)^3$$

指針 指数法則(指数が整数) 指数の範囲を、正の整数から整数全体に拡張しても、すでに学習している指数法則はそのまま適用できる。

さらに、 $a^m \div a^n = a^{m-n}$ が成り立つ。 $m \leq n$ の場合でもよい。

- 解答** (1) $a^5 a^{-2} = a^{5+(-2)} = a^3$ 答 < 指数法則 1
 (2) $\frac{a^{-3}}{a^2} = a^{-3-2} = a^{-5} = \frac{1}{a^5}$ 答 < 指数法則 2
 (3) $(a^{-4})^{-1} = a^{(-4) \times (-1)} = a^4$ 答 < 指数法則 3
 (4) $(a^{-2} b)^3 = a^{(-2) \times 3} b^3 = a^{-6} b^3 = \frac{b^3}{a^6}$ 答 < 指数法則 4, 3

B 累乗根

練習
3

次の値を求めよ。

$$(1) \sqrt[3]{1} \quad (2) \sqrt[3]{27} \quad (3) \sqrt[4]{\frac{1}{16}}$$

指針 $\sqrt[n]{a}$ (1)~(3) はそれぞれ、 $x^3=1$, $x^3=27$, $x^4=\frac{1}{16}$ を満たす数 x のうちの正の数を表す。この意味を理解した上で、 $\sqrt[n]{a^n} = a$ ($a > 0$) を使う。

- 解答** (1) $\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1^3} = 1$ 答
 (2) $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$ 答
 (3) $\sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{1}{2}$ 答

注意 1 の 3 乗根は 3 つあり、 $1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ である。

ただし、 $\sqrt[3]{1}$ はそのうちの正の実数を表し、 $\sqrt[3]{1} = 1$ である。

練習
4

次の式を計算せよ。

$$(1) \sqrt[4]{2^4 \sqrt{8}} \quad (2) \frac{\sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{3}} \quad (3) (\sqrt[4]{5})^3 \quad (4) \sqrt[3]{\sqrt{27}}$$

指針 累乗根の性質 p.214 のまとめの 5 累乗根の性質のうち、1~3 については、平方根 $\sqrt{\quad}$ についても同様の性質があった。4 については十分注意して適用する。さらに、 $\sqrt[n]{a^n} = a$ が使える場合もある。

解答 (1) $\sqrt[4]{2\sqrt[4]{8}} = \sqrt[4]{2 \times 8} = \sqrt[4]{2^4} = 2$ 答

← 性質 1

(2) $\sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{12}}{3}} = \sqrt[3]{\frac{12}{3}} = \sqrt[3]{4}$ 答

← 性質 2

(3) $(\sqrt[4]{5})^3 = \sqrt[4]{5^3} = \sqrt[4]{125}$ 答

← 性質 3

(4) $\sqrt[3]{\sqrt{27}} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{3^3}} = \sqrt[3 \times 2]{3^{3 \times 1}} = \sqrt[2]{3} = \sqrt{3}$ 答

← 性質 4, 5

深める

教科書 157 ページの累乗根の性質 1 を用いて、累乗根の性質 3 が成り立つことを説明しよう。

教 p.157

解答 $(\sqrt[n]{a})^m = \underbrace{\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{a} \cdots \sqrt[n]{a}}_{\substack{\sqrt[n]{a} \text{ が } m \text{ 個}}} = \sqrt[n]{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{a \text{ が } m \text{ 個}}} \\ = \sqrt[n]{a^m}$ 終

C 有理数の指数

教 p.158

練習
5

次の値を求めよ。

(1) $9^{\frac{1}{2}}$

(2) $16^{\frac{3}{4}}$

(3) $125^{-\frac{2}{3}}$

指針 有理数の指数 $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ を使う。(3) のように、指数が負の有理数のときは、 $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$ により、まず正の有理数に直す。

解答 (1) $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$ 答

(2) $16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = (\sqrt[4]{16})^3 = 2^3 = 8$ 答

(3) $125^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{125^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{125^2}} = \frac{1}{(\sqrt[3]{5^3})^2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$ 答

練習
6

次の式を計算せよ。

(1) $2^{\frac{3}{2}} \times 2^{\frac{4}{3}} \div 2^{\frac{5}{6}}$

(2) $3^{\frac{1}{2}} \div 3^{\frac{5}{6}} \times 3^{\frac{1}{3}}$

(3) $\sqrt[4]{5} \times \sqrt[8]{5^3} \div \sqrt{5}$

(4) $\sqrt[3]{4} \div \sqrt[12]{4} \times \sqrt[4]{4}$

教 p.159

指針 指数法則 (指数が有理数) p.215 のまとめの 7 指数法則を使う。(3), (4) は、有理数の指数を使って書き改めてから適用することになる。

解答 (1) $2^{\frac{3}{2}} \times 2^{\frac{4}{3}} \div 2^{\frac{5}{6}} = 2^{\frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{6}}$

$= 2^{\frac{9}{6} + \frac{8}{6} - \frac{5}{6}}$

$= 2^2 = 4$ 答

← $\frac{9}{6} + \frac{8}{6} - \frac{5}{6} = \frac{12}{6} = 2$

$$(2) \quad 3^{\frac{1}{2}} \div 3^{\frac{5}{6}} \times 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{2} - \frac{5}{6} + \frac{1}{3}} \\ = 3^0 = 1 \quad \text{答}$$

$$(3) \quad \sqrt[4]{5} \times \sqrt[8]{5^3} \div \sqrt{5} = 5^{\frac{1}{4}} \times 5^{\frac{3}{8}} \div 5^{\frac{1}{2}} \\ = 5^{\frac{1}{4} + \frac{3}{8} - \frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{8}} \\ = \sqrt[8]{5} \quad \text{答}$$

$$(4) \quad \sqrt[3]{4} \div \sqrt[12]{4} \times \sqrt[4]{4} = 4^{\frac{1}{3}} \div 4^{\frac{1}{12}} \times 4^{\frac{1}{4}} \\ = 4^{\frac{1}{3} - \frac{1}{12} + \frac{1}{4}} \\ = 4^{\frac{4}{12} - \frac{1}{12} + \frac{3}{12}} \\ = 4^{\frac{1}{2}} \\ = (2^2)^{\frac{1}{2}} = 2 \quad \text{答}$$

$$\leftarrow \frac{4}{12} - \frac{1}{12} + \frac{3}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

2 指数関数

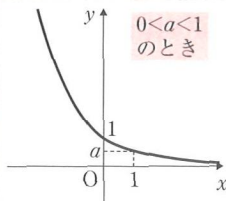
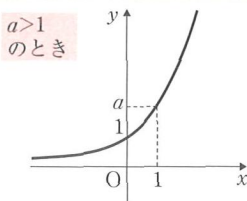
まとめ

1 指数関数

a を 1 と異なる正の定数とすると、 $y=a^x$ は x の関数である。この関数を、 a を 底 とする x の 指数関数 という。

2 指数関数 $y=a^x$ のグラフ

指数関数 $y=a^x$ のグラフは図のようになる。



いずれの場合も、 x 軸を漸近線としてもち、点 $(0, 1)$ 、 $(1, a)$ を通る。

$a > 1$ のとき右上がりの曲線、 $0 < a < 1$ のとき右下がりの曲線である。

3 増加関数、減少関数

x の値が増加すると y の値も増加する関数を 増加関数 といい、 x の値が増加すると y の値は減少する関数を 減少関数 という。

4 指数関数 $y=a^x$ の特徴

1 定義域は実数全体，値域は正の数全体である。

2 $a>1$ のとき，増加関数である。

すなわち $p < q \iff a^p < a^q$

3 $0 < a < 1$ のとき，減少関数である。

すなわち $p < q \iff a^p > a^q$

注意 $a>0$ ， $a \neq 1$ のとき，「 $p=q \iff a^p=a^q$ 」が成り立つ。A 指数関数 $y=a^x$ のグラフ

教 p.160

練習
7次の表は，指数関数 $y=2^x$ における x と y の対応表である。教科書 160 ページの計算にならって，表の空らんをうめよ。

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
y	0.25			0.71			2	2.83	4

指針 $y=2^x$ のグラフ 次の例にならって計算する。

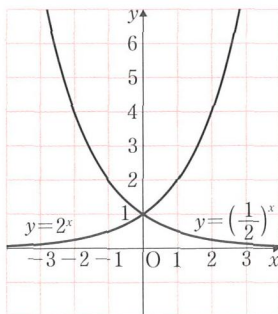
$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0.25 \qquad 2^{-0.5} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \div 0.71$$

$$2^{1.5} = 2^{\frac{3}{2}} = 2^1 \times 2^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2} \div 2.83$$

なお， a が 0 以外のどんな数であっても $a^0=1$ であった。したがって，指数関数 $y=a^x$ のグラフは必ず点 $(0, 1)$ を通る。

解答 $2^{-1.5} = 2^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \div 0.35 \qquad \leftarrow \sqrt{2} = 1.4142\cdots$

$$2^{-1} = \frac{1}{2} = 0.5, \quad 2^0 = 1, \quad 2^{0.5} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \div 1.41$$

よって，空らんの左から順に 0.35, 0.5, 1, 1.41 **答****注意** この表をもとにすると，図のように，指数関数 $y=2^x$ のグラフをかくことができる。また，指数関数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ は $y=2^{-x}$ とも表されるので，そのグラフは， $y=2^x$ のグラフと y 軸に関して対称である。

5 章

指数関数と対数関数

練習
8

次の関数のグラフをかけ。

$$(1) y=3^x \quad (2) y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$$

指針 $y=3^x$, $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ のグラフ $\left(\frac{1}{3}\right)^x=(3^{-1})^x=3^{-x}$ であるから、2つのグラフは y 軸に関して対称である。

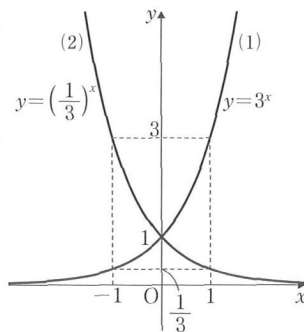
練習7にならって、 $y=3^x$ の表を作ると、次のようになる。

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
y	0.11	0.19	0.33	0.58	1	1.73	3	5.20	9

解答 (1) このグラフは、 x 軸が漸近線で、点 $(0, 1)$ 、 $(1, 3)$ を通る右上がりの曲線で、図のようになる。

(2) このグラフは、 x 軸が漸近線で、点 $(0, 1)$ 、 $\left(1, \frac{1}{3}\right)$ を通る右下がりの曲線である。

また、(1) の曲線と y 軸に関して対称で、図のようになる。



B 指数関数の特徴

練習
9

次の3つの数の大小を不等号を用いて表せ。

$$(1) \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{8}, \sqrt[5]{8} \quad (2) 1, 0.2^3, 0.2^{-1}$$

指針 指数関数の特徴と数の大小 指数関数 $y=a^x$ は、底 a が1より大きいとき増加関数であり、底 a が1より小さいとき減少関数である。

この特徴を使うと、指数の大小によって数の大小を判断することができる。すなわち、 $a>1$ ならば、指数が大きいほど大きく、 $0<a<1$ ならば、指数が大きいほど小さい。

(1) は指数関数 $y=2^x$ 、(2) は指数関数 $y=0.2^x$ で考える。

解答 (1) $\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2^2}=2^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[4]{8}=\sqrt[4]{2^3}=2^{\frac{3}{4}}$, $\sqrt[5]{8}=2^{\frac{3}{5}}$ ←底を2にそろえる。

$y=2^x$ は増加関数であるから ←底は1より大きい。

$$2^{\frac{2}{5}} < 2^{\frac{2}{3}} < 2^{\frac{3}{4}}$$

すなわち $\sqrt[5]{8} < \sqrt[3]{4} < \sqrt[4]{8}$ 答

(2) $y=0.2^x$ は減少関数であるから ←底0.2は1より小さい。

$$0.2^3 < 0.2^0 < 0.2^{-1}$$

すなわち $0.2^3 < 1 < 0.2^{-1}$ 答

← $1=0.2^0$

$$3>0>-1$$

注意 (2) $0.2^3=0.008$, $0.2^{-1}=\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}=5$

底をそろえて
大小を比較
するといひよ。



C 指数関数を含む方程式, 不等式

教 p.163

練習 10

次の方程式を解け。

(1) $4^x=8$ (2) $8^x=\frac{1}{16}$ (3) $27^x=3^{2-x}$

指針 指数関数を含む方程式 指数関数の特徴を利用して解く。

$$a>0, a\neq 1 \text{ のとき } a^r=a^s \iff r=s$$

それぞれ底をそろえて考える。

解答 (1) 方程式を変形すると $2^{2x}=2^3$ $\leftarrow 4^x=(2^2)^x=2^{2x}$
よって, $2x=3$ であるから, これを解いて $x=\frac{3}{2}$ **答**

(2) 方程式を変形すると $2^{3x}=2^{-4}$ $\leftarrow \frac{1}{16}=\frac{1}{2^4}=2^{-4}$

よって, $3x=-4$ であるから, これを解いて $x=-\frac{4}{3}$ **答**

(3) 方程式を変形すると $3^{3x}=3^{2-x}$ $\leftarrow 27^x=(3^3)^x=3^{3x}$

よって, $3x=2-x$ であるから, これを解いて $x=\frac{1}{2}$ **答**

練習 11

次の不等式を解け。

(1) $3^x<81$ (2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x\geq\frac{1}{32}$ (3) $2^{3x-4}>\left(\frac{1}{4}\right)^x$

指針 指数関数を含む不等式 指数関数の特徴を利用して解く。

$$a>1 \text{ のとき } a^r<a^s \iff r<s \quad \leftarrow \text{不等号の向きは同じ}$$

$$0<a<1 \text{ のとき } a^r<a^s \iff r>s \quad \leftarrow \text{不等号の向きは逆転}$$

それぞれ底をそろえて考える。

解答 (1) 不等式を変形すると $3^x<3^4$ $\leftarrow y=3^x$ は増加関数

底 3 は 1 より大きいから $x<4$ **答**

(2) 不等式を変形すると $\left(\frac{1}{2}\right)^x\geq\left(\frac{1}{2}\right)^5$ $\leftarrow y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ は減少関数

底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいから $x\leq 5$ **答**

5 章

指数関数と対数関数

教 p.163

(3) 不等式を変形すると $2^{3x-4} > 2^{-2x}$
 底 2 は 1 より大きいから $3x-4 > -2x$
 これを解いて $x > \frac{4}{5}$ 答

$\leftarrow y=2^x$ は増加関数

底をそろえて
解こう。



深
め
る

教科書の例題 4(2) を、両辺の底を 3 にそろえて解いてみよう。

教 p.163

指針 指数関数を含む不等式 $\frac{1}{3} = 3^{-1}$, $\frac{1}{9} = 3^{-2}$ であることを利用する。

解答 不等式を変形すると $(3^{-1})^{x+1} < (3^{-2})^x$
 $3^{-(x+1)} < 3^{-2x}$
 底 3 は 1 より大きいから $-(x+1) < -2x$
 これを解いて $x < 1$ 答

練習
12

次の方程式を解け。

(1) $4^x + 2 \cdot 2^x - 3 = 0$

(2) $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$

教 p.164

指針 指数関数を含む方程式 (1) は $2^x = t$, (2) は $3^x = t$ とおくと、いずれも t の 2 次方程式になる。 $t > 0$ であることに注意して解く。

解答 (1) 方程式を変形すると

$$(2^x)^2 + 2 \cdot 2^x - 3 = 0$$

$$\leftarrow 4^x = (2^2)^x = (2^x)^2$$

$2^x = t$ とおくと、 $t > 0$ であり、方程式は

$$t^2 + 2t - 3 = 0 \quad \text{すなわち} \quad (t-1)(t+3) = 0$$

$t > 0$ であるから $t = 1$

よって $2^x = 1$ すなわち $2^x = 2^0$

したがって $x = 0$ 答

(2) 方程式を変形すると

$$(3^x)^2 - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$$

$$\leftarrow 9^x = (3^2)^x = (3^x)^2$$

$3^x = t$ とおくと、 $t > 0$ であり、方程式は

$$t^2 - 4t + 3 = 0 \quad \text{すなわち} \quad (t-1)(t-3) = 0$$

$t > 0$ であるから $t = 1, 3$

$t = 1$ のとき $3^x = 3^0$ よって $x = 0$

$t = 3$ のとき $3^x = 3^1$ よって $x = 1$

したがって $x = 0, 1$ 答

練習
13

次の不等式を解け。

(1) $9^x + 3^x - 12 > 0$

(2) $\left(\frac{1}{4}\right)^x + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x - 10 \leq 0$

指針 指数関数を含む不等式 (1) は $3^x = t$, (2) は $\left(\frac{1}{2}\right)^x = t$ とおくと、いずれも t の 2 次不等式になる。 $t > 0$ であることに注意して解く。

解答 (1) 不等式を変形すると $(3^x)^2 + 3^x - 12 > 0$ $\leftarrow 9^x = (3^2)^x = (3^x)^2$

$3^x = t$ とおくと、 $t > 0$ であり、不等式は

$$t^2 + t - 12 > 0 \quad \text{すなわち} \quad (t-3)(t+4) > 0$$

$t+4 > 0$ であるから

$$t-3 > 0 \quad \text{すなわち} \quad t > 3$$

$$\text{よって} \quad 3^x > 3 \quad \text{すなわち} \quad 3^x > 3^1$$

底 3 は 1 より大きいから $x > 1$ 答

(2) 不等式を変形すると

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x - 10 \leq 0 \quad \leftarrow \left(\frac{1}{4}\right)^x = \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}^x = \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2$$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x = t$ とおくと、 $t > 0$ であり、不等式は

$$t^2 + 3t - 10 \leq 0 \quad \text{すなわち} \quad (t-2)(t+5) \leq 0$$

$t+5 > 0$ であるから

$$t-2 \leq 0 \quad \text{すなわち} \quad t \leq 2$$

$$\text{よって} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 2 \quad \text{すなわち} \quad 2^{-x} \leq 2^1$$

底 2 は 1 より大きいから $-x \leq 1$

すなわち $x \geq -1$ 答

$a > 0$ のとき、任意の実数 x に対して、常に $a^x > 0$ であることに注意しよう。

5
章

指数関数と対数関数

第5章 第1節

問題

教 p.165

- 1 光の進む速さが、毎秒 $3.0 \times 10^8 \text{ m}$ であるとする、光は 1 km を進むのに約 $3.3 \times 10^{\square}$ 秒かかる。 $\square$ に適する整数を求めよ。

指針 指数法則(指数が整数) 「時間=距離÷速さ」を使う。

指数法則 $a^m \div a^n = a^{m-n}$ によって計算する。

解答 $1 \text{ km} = 10^3 \text{ m}$ であるから、 1 km を進むのにかかる時間は

$$\begin{aligned} 10^3 \div (3.0 \times 10^8) &= 10^3 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{10^8} \div 0.33 \times 10^3 \times 10^{-8} \\ &= 3.3 \times 10^{-1} \times 10^3 \times 10^{-8} = 3.3 \times 10^{-6} \text{ (秒)} \end{aligned} \quad \text{答} \quad -6$$

教 p.165

- 2 次の式を計算せよ。

$$(1) \sqrt[3]{6} \sqrt[3]{9}$$

$$(2) \sqrt[4]{48} - \sqrt[4]{3}$$

$$(3) (\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{2})$$

$$(4) (2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}})(2^{\frac{2}{3}} + 1 + 2^{-\frac{2}{3}})$$

指針 指数法則(指数が有理数) 式の形に注目すると、(3)は $(a+b)(a-b)$ 、(4)は $(a-b)(a^2+ab+b^2)$ の展開の公式が利用できる。

解答 (1) $\sqrt[3]{6} \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{6 \times 9} = \sqrt[3]{2 \times 3^3}$
 $= \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{3^3} = \sqrt[3]{2} \times 3 = 3\sqrt[3]{2} \quad \text{答}$

$$\begin{aligned} (2) \sqrt[4]{48} - \sqrt[4]{3} &= \sqrt[4]{3 \times 2^4} - \sqrt[4]{3} \\ &= \sqrt[4]{3} \times \sqrt[4]{2^4} - \sqrt[4]{3} \\ &= 2\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{3} \quad \text{答} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) (\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{2}) &= (3^{\frac{1}{4}} + 2^{\frac{1}{4}})(3^{\frac{1}{4}} - 2^{\frac{1}{4}}) \\ &= (3^{\frac{1}{4}})^2 - (2^{\frac{1}{4}})^2 \\ &= 3^{\frac{1}{2}} - 2^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{3} - \sqrt{2} \quad \text{答} \end{aligned}$$

$$\leftarrow \sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{4}}$$

$$\leftarrow (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$\leftarrow (a^r)^s = a^{rs}$$

$$\begin{aligned} (4) (2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}})(2^{\frac{2}{3}} + 1 + 2^{-\frac{2}{3}}) &= (2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}})\{(2^{\frac{1}{3}})^2 + 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{3}} + (2^{-\frac{1}{3}})^2\} \\ &= (2^{\frac{1}{3}})^3 - (2^{-\frac{1}{3}})^3 = 2 - 2^{-1} \\ &= 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{答} \end{aligned}$$

$$\leftarrow 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{3}} = 2^0 = 1$$

$$\leftarrow (a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$$

3 次の関数のグラフをかけ。

(1) $y=2^{x-1}$

(2) $y=2^x+1$

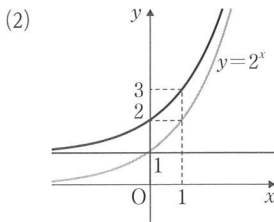
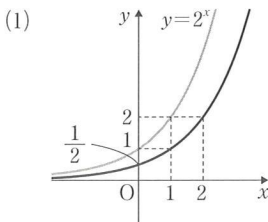
指針 指数関数のグラフ $f(x)=2^x$ とおくと、(1) の関数は $y=f(x-1)$ 、(2) の関数は $y=f(x)+1$ すなわち $y-1=f(x)$ と表される。

一般に、 $y-q=f(x-p)$ のグラフは、 $y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に p 、 y 軸方向に q だけ平行移動したものである。

解答 (1) このグラフは、 $y=2^x$ のグラフを x 軸方向に 1 だけ平行移動したもので、図のようになる。

(2) $y=2^x$ のグラフを y 軸方向に 1 だけ平行移動したものである。

また、漸近線は直線 $y=1$ であり、図のようになる。



5 章

指数関数と対数関数

4 次の方程式、不等式を解け。

(1) $3^{3x-1}=81$

(2) $2^{1-x}=\sqrt[3]{2}$

(3) $4^x-32>0$

(4) $\left(\frac{1}{9}\right)^{1-x} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$

指針 指数関数を含む方程式、不等式 底をそろえて、指数部分を比較する。

(1), (2) $a>0, a \neq 1$ のとき $a^r=a^s \iff r=s$

(3) $a>1$ のとき $a^r<a^s \iff r<s$

(4) $0<a<1$ のとき $a^r \leq a^s \iff r \geq s$

解答 (1) 方程式を変形すると $3^{3x-1}=3^4$

$$3x-1=4 \text{ から } x=\frac{5}{3} \quad \text{答}$$

(2) 方程式を変形すると $2^{1-x}=2^{\frac{1}{3}}$

$$1-x=\frac{1}{3} \text{ から } x=\frac{2}{3} \quad \text{答}$$

(3) 不等式を変形すると $2^{2x}>2^5$

$$\text{底 } 2 \text{ は } 1 \text{ より大きいから } 2x>5$$

$$\text{これを解いて } x>\frac{5}{2} \quad \text{答}$$

$$(4) \text{ 不等式を変形すると } \left(\frac{1}{3}\right)^{2(1-x)} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$$

底 $\frac{1}{3}$ は 1 より小さいから $2(1-x) \geq 2x$

$$\text{これを解いて } x \leq \frac{1}{2} \quad \text{答}$$

5 次の方程式，不等式を解け。

$$(1) \quad 2^{2x+1} - 2^{x+3} - 64 = 0 \qquad (2) \quad 3 \cdot 9^x - 28 \cdot 3^x + 9 > 0$$

指針 指数関数を含む方程式，不等式 $a^x = t$ とおいて，(1) は t の 2 次方程式，(2) は t の 2 次不等式を解く。 $t > 0$ であることに注意する。

解答 (1) 方程式を変形すると $2(2^x)^2 - 8 \cdot 2^x - 64 = 0$

$2^x = t$ とおくと， $t > 0$ であり，方程式は

$$2t^2 - 8t - 64 = 0 \quad \text{すなわち} \quad 2(t+4)(t-8) = 0$$

$t > 0$ であるから $t = 8$

$$\text{よって } 2^x = 8 \quad \text{すなわち} \quad 2^x = 2^3$$

$$\text{したがって } x = 3 \quad \text{答}$$

$$(2) \text{ 不等式を変形すると } 3 \cdot (3^x)^2 - 28 \cdot 3^x + 9 > 0$$

$3^x = t$ とおくと， $t > 0$ であり，不等式は

$$3t^2 - 28t + 9 > 0 \quad \text{すなわち} \quad (t-9)(3t-1) > 0$$

$$\text{これを解くと } t < \frac{1}{3}, \quad 9 < t$$

$$\text{よって } 3^x < \frac{1}{3}, \quad 9 < 3^x$$

$$\text{すなわち } 3^x < 3^{-1}, \quad 3^2 < 3^x$$

$$\text{底 3 は 1 より大きいから } x < -1, \quad 2 < x \quad \text{答}$$

6 関数 $y=4^x-2^{x+1}+3$ ($x<2$) について、次の問いに答えよ。

- (1) $2^x=t$ として、 y を t の関数で表せ。
- (2) t のとりうる値の範囲を求めよ。
- (3) y の最小値と、そのときの x の値を求めよ。

指針 指数関数を含む関数の最小値

- (1) $4^x=(2^2)^x=(2^x)^2$, $2^{x+1}=2^x 2^1=2 \cdot 2^x$ であるから、 $2^x=t$ とおくと、与えられた関数は t の 2 次関数になる。
- (2) $a>1$ のとき、 $p<q \iff 0<a^p<a^q$ であることを利用する。
- (3) t のとりうる値の範囲に注意して、定義域の両端や頂点などに着目する。

解答 (1) 与えられた関数を変形すると

$$y=(2^x)^2-2 \cdot 2^x+3$$

よって、 $2^x=t$ とおくと $y=t^2-2t+3$ 答

$$(2) 0<2^x<2^2 \text{ から } 0<t<4 \text{ 答}$$

(3) (1) から

$$y=t^2-2t+3 \quad \text{すなわち} \quad y=(t-1)^2+2$$

(2) の範囲において、 y は $t=1$ で最小値 2 をとる。

また、 $t=1$ のとき $2^x=1$ このとき $x=0$

よって、この関数は $x=0$ で最小値 2 をとる。 答

第2節 対数関数

3 対数とその性質

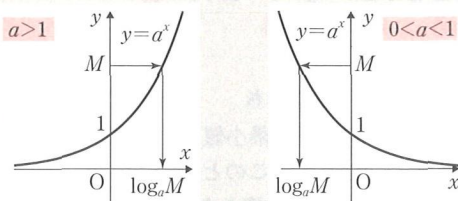
まとめ

1 $\log_2 M$

指数関数 $y=2^x$ は増加関数で、値域は正の数全体であるから、どんな正の数 M に対しても、 $M=2^x$ となる実数 x がただ1つ定まる。この x を $\log_2 M$ で表す。

2 対数、底と真数

指数関数 $y=a^x$ を考えれば、どんな正の数 M に対しても、 $M=a^p$ となる実数 p がただ1つ定まる。この p を $\log_a M$ で表し、 a を底とする M の対数という。また、 $\log_a M$ における正の数 M を、この対数の真数という。



注意 $\log$ は対数を意味する英語 logarithm を略したものである。

3 指数と対数

$a>0$, $a \neq 1$ で $M>0$ とするとき、次が成り立つ。

$$M=a^p \iff \log_a M=p$$

注意 以下、 $\log_a M$ と書くとき、 $a>0$, $a \neq 1$, $M>0$ であるとする。

$M=a^p$ のとき、 $\log_a M=p$ であるから、次の等式が得られる。

$$\log_a a^p = p$$

← $\log_a M=p$ の M を a^p に
おき換えたもの

4 対数の性質

$$\log_a 1=0, \quad \log_a a=1$$

$a>0$, $a \neq 1$, $M>0$, $N>0$ のとき

$$1 \quad \log_a MN = \log_a M + \log_a N$$

$$2 \quad \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

$$3 \quad \log_a M^k = k \log_a M \quad k \text{ は実数}$$

← これらの等式を用いる
と、右辺の形を左辺の
形に変形することもで
きる。

注意 2において、とくに $M=1$ のときは $\log_a \frac{1}{N} = -\log_a N$

5 底の変換公式

a, b, c は正の数で, $a \neq 1, b \neq 1, c \neq 1$ とするとき

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad \text{とくに} \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

A 対数

教 p.167

練習
14

次の関係を $\log_a M = p$ の形に書け。

$$(1) 9 = 3^2 \quad (2) \frac{1}{25} = 5^{-2} \quad (3) \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

指針 指数と対数 $M = a^b \iff \log_a M = b$ を利用。

解答 (1) $\log_3 9 = 2$ 答

$$(2) \log_5 \frac{1}{25} = -2 \quad \text{答}$$

$$(3) \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} = 3 \quad \text{答}$$

5
章

指数関数と対数関数

教 p.167

練習
15

次の関係を $M = a^b$ の形に書け。

$$(1) \log_4 16 = 2 \quad (2) \log_{10} \frac{1}{100} = -2 \quad (3) \log_9 3 = \frac{1}{2}$$

指針 指数と対数 $M = a^b \iff \log_a M = b$ を利用。

解答 (1) $16 = 4^2$ 答

$$(2) \frac{1}{100} = 10^{-2} \quad \text{答}$$

$$(3) 3 = 9^{\frac{1}{2}} \quad \text{答}$$

教 p.167

練習
16

次の値を求めよ。

$$(1) \log_2 2^5 \quad (2) \log_5 25 \quad (3) \log_3 \frac{1}{27} \quad (4) \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} \\ (5) \log_{10} 0.1 \quad (6) \log_{\frac{1}{3}} 3 \quad (7) \log_2 \sqrt[3]{2} \quad (8) \log_{\sqrt{5}} 5$$

指針 $\log_a a^p = p$ 真数が底の累乗の形で表されるとき, その累乗の指数が対数の値となる。(2)~(8)は, まず真数を a^b の形にする。

解答 (1) $\log_2 2^5 = 5$ 答

$$(2) \log_5 25 = \log_5 5^2 = 2 \quad \text{答}$$

$$(3) \log_3 \frac{1}{27} = \log_3 3^{-3} = -3 \quad \text{答}$$

$$(4) \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \right)^4 = 4 \quad \text{答}$$

$$(5) \log_{10} 0.1 = \log_{10} \frac{1}{10} = \log_{10} 10^{-1} = -1 \quad \text{答}$$

$$(6) \log_{\frac{1}{3}} 3 = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3} \right)^{-1} = -1 \quad \text{答}$$

$$(7) \log_2 \sqrt[3]{2} = \log_2 2^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \quad \text{答}$$

$$(8) \log_{\sqrt{5}} 5 = \log_{\sqrt{5}} (\sqrt{5})^2 = 2 \quad \text{答}$$

B 対数の性質

教 p.168

練習 17

教科書 168 ページの性質 1 の証明にならって、性質 2, 3 が成り立つことを証明せよ。

指針 対数の性質の証明 指数法則と対数の定義を用いて示す。

解答 【2 の証明】

$$\log_a M = p, \log_a N = q \text{ とすると}$$

$$M = a^p, N = a^q$$

$$\text{よって} \quad \frac{M}{N} = \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$\text{したがって} \quad \log_a \frac{M}{N} = p - q = \log_a M - \log_a N \quad \text{終}$$

【3 の証明】

$$\log_a M = p \text{ とすると, } M = a^p \text{ より } M^k = (a^p)^k = a^{kp} \text{ であるから}$$

$$\log_a M^k = kp = k \log_a M \quad \text{終}$$

教 p.169

練習 18

次の式を計算せよ。

$$(1) \log_4 2 + \log_4 8$$

$$(2) \log_5 2 - \log_5 50$$

$$(3) \log_3 4 + \log_3 18 - 3 \log_3 2$$

$$(4) \log_3 \sqrt[3]{6} - \frac{1}{3} \log_3 2$$

指針 対数の計算 対数の性質 1 ~ 3 を用いて計算するが、公式を「左辺→右辺」に用いる方法と「右辺→左辺」に用いる方法がある。

本問では「右辺→左辺」の方法を用いると計算が簡単である。

$$1 \quad \log_a MN = \log_a M + \log_a N$$

$$2 \quad \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

$$3 \quad \log_a M^k = k \log_a M$$

解答 (1) $\log_4 2 + \log_4 8 = \log_4 (2 \times 8) = \log_4 16$
 $= \log_4 4^2 = 2$ 答

(2) $\log_5 2 - \log_5 50 = \log_5 \frac{2}{50} = \log_5 \frac{1}{25}$
 $= \log_5 5^{-2} = -2$ 答

(3) $\log_3 4 + \log_3 18 - 3 \log_3 2$
 $= \log_3 4 + \log_3 18 - \log_3 2^3$
 $= \log_3 \frac{4 \times 18}{8} = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$ 答

(4) $\log_3 \sqrt[3]{6} - \frac{1}{3} \log_3 2 = \log_3 \sqrt[3]{6} - \log_3 \sqrt[3]{2}$
 $= \log_3 \frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{2}} = \log_3 3^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log_3 3$
 $= \frac{1}{3}$ 答

別解 (1) $\log_4 2 + \log_4 8 = \log_4 2 + \log_4 \frac{16}{2}$

$= \log_4 2 + (\log_4 16 - \log_4 2)$
 $= \log_4 16 = \log_4 4^2 = 2 \log_4 4 = 2$ 答

(2) $\log_5 2 - \log_5 50 = \log_5 2 - \log_5 (2 \times 25)$
 $= \log_5 2 - (\log_5 2 + \log_5 25) = -\log_5 25$
 $= -\log_5 5^2 = -2 \log_5 5 = -2$ 答

(3) $\log_3 4 + \log_3 18 - 3 \log_3 2$
 $= \log_3 2^2 + \log_3 (2 \times 9) - 3 \log_3 2$
 $= 2 \log_3 2 + (\log_3 2 + \log_3 9) - 3 \log_3 2$
 $= \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2 \log_3 3 = 2$ 答

(4) $\log_3 \sqrt[3]{6} - \frac{1}{3} \log_3 2$
 $= \log_3 6^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3} \log_3 2$
 $= \frac{1}{3} \log_3 6 - \frac{1}{3} \log_3 2$
 $= \frac{1}{3} \log_3 (2 \times 3) - \frac{1}{3} \log_3 2$
 $= \frac{1}{3} (\log_3 2 + \log_3 3) - \frac{1}{3} \log_3 2$
 $= \frac{1}{3} \log_3 3 = \frac{1}{3}$ 答

C 底の変換公式

教 p.169

練習
19

次の式を簡単にせよ。

(1) $\log_4 8$

(2) $\log_9 3$

(3) $\log_3 2 \cdot \log_2 27$

指針 底の変換公式 a を底とする対数を、変換公式を用いて任意の数 c (ただし、 $c > 0, c \neq 1$) を底とする対数で表すことができる。底は計算のしやすいものを選べばよい。

解答 (1) $\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{\log_2 2^3}{\log_2 2^2} = \frac{3}{2}$ 

← $4=2^2, 8=2^3$ に着目

(2) $\log_9 3 = \frac{\log_3 3}{\log_3 9} = \frac{1}{\log_3 3^2} = \frac{1}{2}$ 

← $9=3^2$ に着目

(3) $\log_3 2 \cdot \log_2 27 = \log_3 2 \times \frac{\log_3 27}{\log_3 2}$
 $= \log_3 27 = \log_3 3^3 = 3$ 

別解 計算方法は 1 通りではない。たとえば底を 10 で統一しても同じ結果を得る。

(1) $\log_4 8 = \frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 4} = \frac{\log_{10} 2^3}{\log_{10} 2^2}$
 $= \frac{3 \log_{10} 2}{2 \log_{10} 2} = \frac{3}{2}$ 

(2) $\log_9 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 9} = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 3^2}$
 $= \frac{\log_{10} 3}{2 \log_{10} 3} = \frac{1}{2}$ 

(3) $\log_3 2 \cdot \log_2 27 = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 3} \cdot \frac{\log_{10} 27}{\log_{10} 2}$
 $= \frac{\log_{10} 3^3}{\log_{10} 3}$
 $= \frac{3 \log_{10} 3}{\log_{10} 3} = 3$ 

4 対数関数

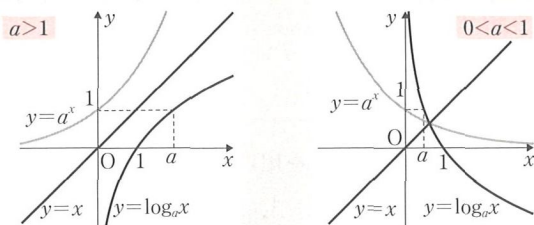
まとめ

1 対数関数

a を 1 と異なる正の定数とすると、 $y = \log_a x$ は x の関数である。この関数を、 a を 底 とする x の 対数関数 という。

2 対数関数 $y = \log_a x$ のグラフ

指数関数 $y = a^x$ のグラフと直線 $y = x$ に関して対称であり、図のようになる。



いずれの場合も、 y 軸を漸近線としてもち、点 $(1, 0)$ 、 $(a, 1)$ を通る。
 $a > 1$ のとき右上がりの曲線、 $0 < a < 1$ のとき右下がりの曲線である。

3 対数関数 $y = \log_a x$ の特徴

1 定義域は正の数全体、値域は実数全体である。

2 $a > 1$ のとき、増加関数である。すなわち

$$0 < p < q \iff \log_a p < \log_a q$$

3 $0 < a < 1$ のとき、減少関数である。すなわち

$$0 < p < q \iff \log_a p > \log_a q$$

注意 $a > 0$ 、 $a \neq 1$ 、 $p > 0$ 、 $q > 0$ のとき、次が成り立つ。

$$p = q \iff \log_a p = \log_a q$$

A 対数関数とそのグラフ

教 p.171

練習
20

次の関数のグラフをかけ。

(1) $y = \log_3 x$

(2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

指針 対数関数のグラフ $y = \log_a x$ のグラフは、指数関数 $y = a^x$ のグラフと直線 $y = x$ に関して対称である。(1)、(2) のグラフはそれぞれ指数関数 $y = 3^x$ 、

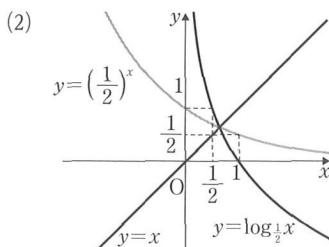
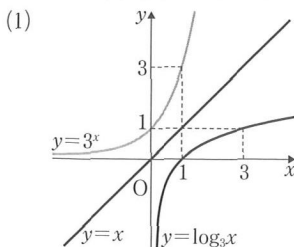
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフをもとにしてかくことができる。

解答 (1) このグラフは、 y 軸が漸近線で、点 $(1, 0)$ 、 $(3, 1)$ を通る右上がりの曲線であり、図のようになる。

5 章

指数関数と対数関数

- (2) このグラフは、 y 軸が漸近線で、点 $(1, 0)$, $(\frac{1}{2}, 1)$ を通る右下がりの曲線であり、図のようになる。



B 対数関数の特徴

練習 21

次の 2 つの数の大小を不等号を用いて表せ。

- (1) $3\log_4 3$, $2\log_4 5$ (2) $\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{4}} 8$, $\log_{\frac{1}{4}} 3$ (3) $\log_2 3$, 2

指針 対数関数の特徴と数の大小 対数関数 $y=\log_a x$ は、底 a が 1 より大きいとき増加関数であり、底 a が 1 より小さいとき減少関数である。

すなわち、対数関数 $y=\log_a x$ は、 $a>1$ ならば、真数が大きいほど大きく、 $0<a<1$ ならば、真数が大きいほど小さい。

(1) は対数関数 $y=\log_4 x$, (2) は $y=\log_{\frac{1}{4}} x$ で考える。

また、(3) は $y=\log_2 x$ で考える。 $2=\log_2 2^2$ であることに注意。

解答 (1) $3\log_4 3=\log_4 3^3=\log_4 27$

$$2\log_4 5=\log_4 5^2=\log_4 25$$

$y=\log_4 x$ は増加関数であるから

$$\log_4 25 < \log_4 27$$

すなわち $2\log_4 5 < 3\log_4 3$ **答**

← 底 4 は 1 より大きい。

(2) $\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{4}} 8=\log_{\frac{1}{4}} 8^{\frac{1}{2}}=\log_{\frac{1}{4}} 2\sqrt{2}$

$y=\log_{\frac{1}{4}} x$ は減少関数であるから

$$\log_{\frac{1}{4}} 3 < \log_{\frac{1}{4}} 2\sqrt{2}$$

すなわち $\log_{\frac{1}{4}} 3 < \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{4}} 8$ **答**

← 底 $\frac{1}{4}$ は 1 より小さい。

$$\leftarrow 3 > 2\sqrt{2}$$

(3) $\log_2 2=1$ であるから

$$2=2\log_2 2=\log_2 2^2=\log_2 4$$

$y=\log_2 x$ は増加関数であるから

$$\log_2 3 < \log_2 4$$

すなわち $\log_2 3 < 2$ **答**

← 底 2 は 1 より大きい。

C 対数関数を含む方程式、不等式

教 p.172

練習
22

次の方程式、不等式を解け。

- (1) $\log_2 x = 4$ (2) $\log_{\frac{1}{2}} x = 2$ (3) $\log_2 x \leq 4$
 (4) $\log_{\frac{1}{2}} x < 2$ (5) $\log_3 x > 2$ (6) $\log_{0.5} x \geq 2$

指針 対数関数を含む方程式、不等式 $a > 0, a \neq 1, p > 0, q > 0$ のとき

$$\log_a b = \log_a q \iff b = q$$

$$a > 1 \text{ のとき } \log_a b < \log_a q \iff 0 < b < q \quad \leftarrow \text{向き同じ}$$

$$0 < a < 1 \text{ のとき } \log_a b < \log_a q \iff 0 < q < b \quad \leftarrow \text{向き逆転}$$

なお、対数においては、真数 > 0 であることに注意する。解答 (1) 対数の定義から $x = 2^4$ よって $x = 16$ 答(2) 対数の定義から $x = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ よって $x = \frac{1}{4}$ 答(3) 真数は正であるから $x > 0$ …… ①

$$\text{不等式を変形すると } \log_2 x \leq \log_2 2^4 \quad \leftarrow 4 = 4 \log_2 2$$

$$\text{すなわち } \log_2 x \leq \log_2 16 \quad = \log_2 2^4$$

$$\text{底 } 2 \text{ は } 1 \text{ より大きいから } x \leq 16 \quad \text{…… ②}$$

$$\text{①, ② の共通範囲を求めて } 0 < x \leq 16 \quad \text{答}$$

(4) 真数は正であるから $x > 0$ …… ①

$$\text{不等式を変形すると } \log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad \leftarrow 2 = 2 \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$$

$$\text{すなわち } \log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} \quad = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\text{底 } \frac{1}{2} \text{ は } 1 \text{ より小さいから } x > \frac{1}{4} \quad \text{…… ②}$$

$$\text{①, ② の共通範囲を求めて } x > \frac{1}{4} \quad \text{答}$$

(5) 真数は正であるから $x > 0$ …… ①

$$\text{不等式を変形すると } \log_3 x > \log_3 3^2 \quad \leftarrow 2 = 2 \log_3 3$$

$$\text{すなわち } \log_3 x > \log_3 9 \quad = \log_3 3^2$$

$$\text{底 } 3 \text{ は } 1 \text{ より大きいから } x > 9 \quad \text{…… ②}$$

$$\text{①, ② の共通範囲を求めて } x > 9 \quad \text{答}$$

(6) 真数は正であるから $x > 0$ …… ①

$$\text{不等式を変形すると } \log_{0.5} x \geq \log_{0.5} 0.5^2 \quad \leftarrow 2 = 2 \log_{0.5} 0.5$$

$$\text{すなわち } \log_{0.5} x \geq \log_{0.5} 0.25 \quad = \log_{0.5} 0.5^2$$

5
章

指数関数と対数関数

底 0.5 は 1 より小さいから $x \leq 0.25$ …… ②①, ② の共通範囲を求めて $0 < x \leq 0.25$ 答練習
23

次の方程式を解け。

(1) $\log_4 x + \log_4 (x-6) = 2$

(2) $\log_2 (x+5) + \log_2 (x-2) = 3$

教 p.173

指針 対数関数を含む方程式 (1) $\log_4 X = 2$ (2) $\log_2 X = 3$ の形に変形して,(1) $X = 4^2$ (2) $X = 2^3$ を導く。左辺を 1 つの対数にまとめるには次のことを使う。

$$M > 0, N > 0 \text{ のとき } \log_a M + \log_a N = \log_a MN$$

なお, 真数 > 0 であることを忘れないようにする。解答 (1) 真数は正であるから $x > 0$ かつ $x - 6 > 0$ ← 真数 > 0

すなわち $x > 6$ …… ①

方程式を変形すると $\log_4 x(x-6) = 2$ ← $\log_a M = p \iff M = a^p$

よって $x(x-6) = 4^2$

式を整理すると $x^2 - 6x - 16 = 0$

$(x+2)(x-8) = 0$

① から

$x = 8$ 答

← $x = -2$ は ① を満たさない。

(2) 真数は正であるから

$x + 5 > 0$ かつ $x - 2 > 0$

すなわち $x > 2$ …… ①

← 共通範囲

方程式を変形すると

$\log_2 (x+5)(x-2) = 3$ ← $\log_a M = p \iff M = a^p$

よって $(x+5)(x-2) = 2^3$

整理すると $x^2 + 3x - 18 = 0$

したがって $(x-3)(x+6) = 0$

① から

$x = 3$ 答

← $x = -6$ は ① を満たさない。練習
24

次の不等式を解け。

(1) $\log_{\frac{1}{3}} (3-2x) \leq \log_{\frac{1}{3}} x$

(2) $2 \log_3 (2-x) < \log_3 (x+4)$

教 p.173

指針 対数関数を含む不等式

(1) $0 < a < 1$ のとき $\log_a p \leq \log_a q \iff p \geq q > 0$

(2) $a > 1$ のとき $\log_a p < \log_a q \iff 0 < p < q$

対数の真数は常に正である。(2) において不等式を

$\log_3(2-x)^2 < \log_3(x+4)$ と変形してから真数条件を考えて得られる

「 $(2-x)^2 > 0$ かつ $x+4 > 0$ 」は誤りである。真数条件は必ずもとの不等式で判断すること。

解答 (1) 真数は正であるから $3-2x > 0$ かつ $x > 0$

すなわち $0 < x < \frac{3}{2}$ …… ①

底 $\frac{1}{3}$ は 1 より小さいから $\log_{\frac{1}{3}}(3-2x) \leq \log_{\frac{1}{3}}x$ より

$3-2x \geq x$ すなわち $x \leq 1$ …… ②

①, ② の共通範囲を求めて $0 < x \leq 1$ **答**

(2) 真数は正であるから $2-x > 0$ かつ $x+4 > 0$

すなわち $-4 < x < 2$ …… ①

不等式を変形すると $\log_3(2-x)^2 < \log_3(x+4)$

底 3 は 1 より大きいから $(2-x)^2 < x+4$

式を整理して $x^2 - 5x < 0$

左辺を因数分解して $x(x-5) < 0$

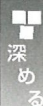
よって $0 < x < 5$ …… ②

①, ② の共通範囲を求めて $0 < x < 2$ **答**

5 章

指数関数と対数関数

教 p.173



方程式 $\log_3 x(x-8) = 2$ を解いてみよう。教科書の応用例題 2 と答えは同じだろうか。

指針 対数関数を含む方程式 真数が正である条件が応用例題 2 とは異なることに注意する。

解答 真数は正であるから $x(x-8) > 0$

すなわち $x < 0, 8 < x$ …… ①

$\log_3 x(x-8) = 2$ から $x(x-8) = 3^2$

式を整理すると $x^2 - 8x - 9 = 0$

すなわち $(x+1)(x-9) = 0$

① から $x = -1, 9$

よって、応用例題 2 と答えは同じではない。 **答**

真数 > 0 に
注意しよう。



D 対数関数を含む関数の最大値, 最小値

教 p.174

練習
25

$1 \leq x \leq 16$ のとき, 関数 $y = (\log_2 x)^2 - \log_2 x^2$ の最大値と最小値を求めよ。

指針 対数関数を含む関数の最大値, 最小値 $\log_2 x = t$ とおき, t の値の範囲を求める。次に, y を t の式で表すと, t の 2 次関数になる。 t が求めた範囲を動くとき, この t の 2 次関数の最大値, 最小値を求める。

解答 $\log_2 x = t$ とおくと, $1 \leq x \leq 16$ であるから

$$\log_2 1 \leq \log_2 x \leq \log_2 16$$

$$0 \leq \log_2 x \leq \log_2 2^4 \text{ であるから}$$

$$0 \leq t \leq 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

与えられた関数の式を変形すると

$$y = (\log_2 x)^2 - 2 \log_2 x$$

$$y \text{ を } t \text{ の式で表すと } y = t^2 - 2t$$

$$\text{すなわち } y = (t-1)^2 - 1$$

① の範囲において, y は

$t=4$ で最大値 8 をとり,

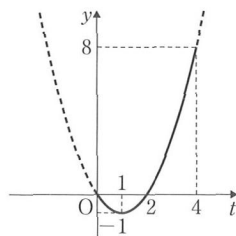
$t=1$ で最小値 -1 をとる。

また, $t=4$ のとき $\log_2 x = 4$ このとき $x = 2^4 = 16$

$t=1$ のとき $\log_2 x = 1$ このとき $x = 2^1 = 2$

よって, この関数は

$x=16$ で最大値 8 をとり, $x=2$ で最小値 -1 をとる。 答



最大値・最小値の問題
は定義域に注意しよう。



5 常用対数

まとめ

1 常用対数

10 を底とする対数を 常用対数 という。教科書の常用対数表に、 a が 1.00, 1.01, 1.02, …, 9.99 のときの $\log_{10} a$ の値について、小数第 5 位を四捨五入して小数第 4 位まで載せてある。

2 自然数 N の桁数

自然数 N , k について、次のことがいえる。

$$N \text{ が } k \text{ 桁の数} \iff k-1 \leq \log_{10} N < k \iff 10^{k-1} \leq N < 10^k$$

3 小数首位の問題

$0 < M < 1$ である小数 M と自然数 k について、次のことがいえる。

$$\left[\begin{array}{l} M \text{ の小数第 } k \text{ 位に初めて} \\ 0 \text{ でない数字が現れる} \end{array} \right] \iff -k \leq \log_{10} M < -k+1$$

A 常用対数

練習
26

教 p.175

常用対数表を用いて、次の値を小数第 4 位まで求めよ。

$$(1) \log_{10} 3450 \quad (2) \log_{10} 92000 \quad (3) \log_{10} 0.000618$$

指針 常用対数の値(対数表の利用) 正の数 M は次の形に表すことができる。

$$M = a \times 10^n \quad \text{ただし, } n \text{ は整数で } 1 \leq a < 10$$

$$\text{このとき } \log_{10} M = \log_{10} a + \log_{10} 10^n = \log_{10} a + n$$

$\log_{10} a$ の近似値は常用対数表から求める。

$$\text{解答 } (1) \log_{10} 3450 = \log_{10} (3.45 \times 10^3) = \log_{10} 3.45 + \log_{10} 10^3$$

$$= 0.5378 + 3 = 3.5378 \quad \text{答}$$

$$(2) \log_{10} 92000 = \log_{10} (9.20 \times 10^4) = \log_{10} 9.20 + \log_{10} 10^4$$

$$= 0.9638 + 4 = 4.9638 \quad \text{答}$$

$$(3) \log_{10} 0.000618 = \log_{10} (6.18 \times 10^{-4}) = \log_{10} 6.18 + \log_{10} 10^{-4}$$

$$= 0.7910 - 4 = -3.2090 \quad \text{答}$$

B 常用対数の応用

練習
27

教 p.176

2^{100} は何桁の数か。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

指針 自然数 N の桁数 $\log_{10} N$ の値の範囲から自然数 N の桁数を求める。まず、与えられた $\log_{10} 2$ の値を使って、 $\log_{10} 2^{100}$ の近似値を求め、それがどんな 2 つの自然数の間にあるかを調べる。

5 章

指数関数と対数関数

$k-1 \leq \log_{10} N < k$ のとき、自然数 N は k 桁の数である。

解答 $\log_{10} 2^{100} = 100 \log_{10} 2 = 100 \times 0.3010 = 30.10$

$30 < \log_{10} 2^{100} < 31$ であるから

$$\log_{10} 10^{30} < \log_{10} 2^{100} < \log_{10} 10^{31}$$

よって $10^{30} < 2^{100} < 10^{31}$

したがって、 2^{100} は 31 桁の数である。 **答**

教 p.177

練習
28

3^n が 8 桁の数となるような自然数 n をすべて求めよ。ただし、
 $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

指針 桁数と指数 n の値 3^n が 8 桁の数のとき、 $10^7 \leq 3^n < 10^8$ が成り立つ。各辺の常用対数を取り、 n についての不等式を導く。

解答 3^n が 8 桁の数となるのは、 $10^7 \leq 3^n < 10^8$ のときである。

各辺の常用対数をとると $7 \leq n \log_{10} 3 < 8$

$\log_{10} 3 = 0.4771 > 0$ であるから

$$\frac{7}{\log_{10} 3} \leq n < \frac{8}{\log_{10} 3} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{ここで} \quad \frac{7}{\log_{10} 3} = \frac{7}{0.4771} = 14.6\cdots\cdots,$$

$$\frac{8}{\log_{10} 3} = \frac{8}{0.4771} = 16.7\cdots\cdots$$

よって、 $\textcircled{1}$ を満たす自然数 n は

$$n = 15, 16 \quad \text{答}$$

教 p.177

練習
29

$\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$ を小数で表したとき、小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

指針 小数と常用対数 $0 < M < 1$ のとき

M の小数第 k 位に初めて 0 でない数字が現れる

$$\iff -k \leq \log_{10} M < -k+1$$

解答 $\log_{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{20} = 20 \log_{10} \frac{1}{2} = -20 \log_{10} 2 = -6.020$

$-7 < \log_{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{20} < -6$ であるから

$$10^{-7} < \left(\frac{1}{2}\right)^{20} < 10^{-6}$$

よって、 $\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$ は 小数第 7 位 に初めて 0 でない数字が現れる。 **答**

第5章 第2節

問題

教 p.178

7 $\log_{10} 2 = a$, $\log_{10} 3 = b$ とするとき、次の式を a , b で表せ。

(1) $\log_{10} \frac{3}{8}$ (2) $\log_{10} \sqrt[3]{6}$ (3) $\log_2 3$ (4) $\log_{10} 15$

指針 対数の値 (3) 以外は真数を 2 と 3 の積や商で表す工夫をする。さらに $\log_{10} 10 = 1$ であるから 10 も利用できる。(3) は底の変換公式を使う。

解答 (1) $\log_{10} \frac{3}{8} = \log_{10} \frac{3}{2^3} = \log_{10} 3 - 3 \log_{10} 2$

$= b - 3a$ 答

(2) $\log_{10} \sqrt[3]{6} = \log_{10} (2 \times 3)^{\frac{1}{3}}$

$= \frac{1}{3} (\log_{10} 2 + \log_{10} 3) = \frac{1}{3} (a + b)$ 答

(3) $\log_2 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} = \frac{b}{a}$ 答

(4) $\log_{10} 15 = \log_{10} \frac{10 \times 3}{2} = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 + \log_{10} 3$

$= 1 - a + b$ 答

教 p.178

8 a , b , c を 1 と異なる正の数とするとき、次の等式を証明せよ。

$$\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$$

指針 等式の証明 底の変換公式を用いて、底を a にそろえる。

解答 左辺 $= \log_a b \cdot \frac{\log_a c}{\log_a b} \cdot \frac{\log_a a}{\log_a c} = \log_a a = 1$

よって $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$ 終

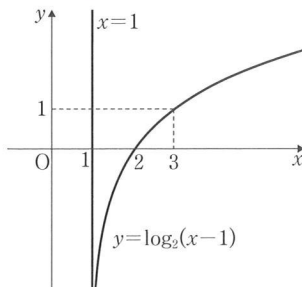
教 p.178

9 関数 $y = \log_2(x-1)$ のグラフをかけ。

指針 対数関数のグラフ 関数 $y = f(x-p)$ のグラフは、 $y = f(x)$ のグラフを x 軸方向に p だけ平行移動したものである。

解答 このグラフは、 $y = \log_2 x$ のグラフを x 軸方向に 1 だけ平行移動したものである。

また、直線 $x=1$ が漸近線で、点 $(2, 0)$, $(3, 1)$ を通る右上がりの曲線であり、図のようになる。



5章

指数関数と対数関数

10 次の方程式、不等式を解け。

$$(1) \log_3(x+1)^2=2$$

$$(2) \log_2 x + \log_2(x+7)=3$$

$$(3) \log_{\frac{1}{2}}(x-1)>2$$

$$(4) \log_2(x+1)+\log_2(x-2)<2$$

指針 対数関数を含む方程式、不等式 まず、真数が正である x の値の範囲を求める。

(2) $\log_a M + \log_a N = \log_a MN$ を用いて、まず与えられた方程式を変形する。

さらに、「 $\log_a X = p \iff X = a^p$ 」を用いると、 x の 2 次方程式が得られる。

(3) 不等式では、 $\log_a M > \log_a N$ などの形を導き、次の性質を利用して、 x の不等式を導く。(4) も同様。

$$0 < a < 1 \text{ のとき } \log_a M > \log_a N \iff 0 < M < N$$

$$1 < a \text{ のとき } \log_a M > \log_a N \iff M > N > 0$$

解答 (1) $\log_3(x+1)^2=2$ から $(x+1)^2=3^2$

よって $x+1=\pm 3$ したがって $x=2, -4$ 答

(2) 真数は正であるから $x>0$ かつ $x+7>0$

すなわち $x>0$ …… ①

方程式を変形すると $\log_2 x(x+7)=3$

よって $x(x+7)=2^3$

整理すると $x^2+7x-8=0$ すなわち $(x-1)(x+8)=0$

これを解くと $x=1, -8$ ① より $x=1$ 答

(3) 真数は正であるから $x-1>0$ すなわち $x>1$ …… ①

不等式を変形すると $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) > \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2$

底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいから

$\leftarrow y = \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$ は減少関数

$$x-1 < \left(\frac{1}{2}\right)^2 \text{ すなわち } x < \frac{5}{4} \text{ …… ②}$$

①, ② の共通範囲を求めて $1 < x < \frac{5}{4}$ 答

(4) 真数は正であるから $x+1>0$ かつ $x-2>0$

すなわち $x>2$ …… ①

不等式を変形すると $\log_2(x+1)(x-2) < \log_2 2^2$

底 2 は 1 より大きいから $(x+1)(x-2) < 2^2$

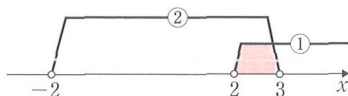
整理すると $x^2-x-6 < 0$

すなわち $(x+2)(x-3) < 0$

これを解くと

$$-2 < x < 3 \text{ …… ②}$$

①, ② の共通範囲を求めて $2 < x < 3$ 答



注意 (1) 真数条件は $x \neq -1$ であるが、これは $(x+1)^2 = 3^2 > 0$ より明らかであり、とくに答案に示す必要はない。

教 p.178

11 $\left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1}{10^4}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

指針 常用対数と不等式 両辺の常用対数を取り、 n についての不等式を導く。

解答 両辺の常用対数をとると

$$\log_{10} \left(\frac{1}{2}\right)^n < \log_{10} \frac{1}{10^4} \quad \text{すなわち} \quad n \log_{10} \frac{1}{2} < -4$$

ここで

$$\log_{10} \frac{1}{2} = -\log_{10} 2 = -0.3010$$

$$\leftarrow \log_a \frac{1}{N} = -\log_a N$$

であるから $n \times (-0.3010) < -4$

$$\text{よって} \quad n > \frac{4}{0.3010} = 13.2 \cdots$$

これを満たす最小の自然数 n は $n = 14$ **答**

教 p.178

12 $\left(\frac{1}{5}\right)^{10}$ を小数で表したとき、小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

指針 小数と常用対数 $0 < M < 1$ のとき

M の小数第 k 位に初めて 0 でない数字が現れる

$$\iff -k \leq \log_{10} M < -k + 1$$

解答 $\log_{10} \left(\frac{1}{5}\right)^{10} = 10 \log_{10} \frac{1}{5} = 10 \log_{10} \frac{2}{10} = 10(\log_{10} 2 - \log_{10} 10)$

$$= 10(0.3010 - 1) = -6.990$$

$$-7 < \log_{10} \left(\frac{1}{5}\right)^{10} < -6 \quad \text{であるから} \quad 10^{-7} < \left(\frac{1}{5}\right)^{10} < 10^{-6}$$

よって、 $\left(\frac{1}{5}\right)^{10}$ を小数で表したとき、小数第 7 位に初めて 0 でない数字が現れる。 **答**

教 p.178

13 方程式 $2(\log_2 x)^2 + \log_2 x^3 - 2 = 0$ について、次の問いに答えよ。

(1) $\log_2 x = t$ とおいて得られる t の方程式を作れ。

(2) 与えられた方程式を解け。

指針 対数関数を含む方程式

- (1) $\log_2 x^3 = 3\log_2 x$ であるから, $\log_2 x = t$ とおくと, 与えられた方程式は t の 2 次方程式となる。
- (2) (1) で得られた t の 2 次方程式の解と $\log_2 x = t$ を用いて, 与えられた方程式の解を求める。

解答 (1) 真数は正であるから $x > 0$ かつ $x^3 > 0$

すなわち $x > 0$ …… ①

与えられた方程式を変形すると

$$2(\log_2 x)^2 + 3\log_2 x - 2 = 0$$

よって, $\log_2 x = t$ とおくと $2t^2 + 3t - 2 = 0$ **答**

- (2) (1) より $(t+2)(2t-1)=0$

よって $t = -2, \frac{1}{2}$

$t = -2$ のとき $\log_2 x = -2$ このとき $x = 2^{-2} = \frac{1}{4}$

$t = \frac{1}{2}$ のとき $\log_2 x = \frac{1}{2}$ このとき $x = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

これらは ① を満たす。

したがって $x = \frac{1}{4}, \sqrt{2}$ **答**

教 p.178

- 14 $3^{23} = 94143178827$ より $9 \times 10^{10} < 3^{23} < 10^{11}$ が成り立つ。このことを用いて, $\log_{10} 3$ の値を小数第 2 位まで求めよ。

指針 常用対数と不等式 与えられた不等式の各辺の常用対数をとる。

解答 $9 \times 10^{10} < 3^{23}$ において, 常用対数をとると

$$\log_{10}(3^2 \times 10^{10}) < \log_{10} 3^{23}$$

よって $2\log_{10} 3 + 10 < 23\log_{10} 3$

すなわち $\log_{10} 3 > \frac{10}{21} = 0.476\cdots$ ①

$3^{23} < 10^{11}$ において, 常用対数をとると

$$\log_{10} 3^{23} < \log_{10} 10^{11}$$

よって $23\log_{10} 3 < 11$

すなわち $\log_{10} 3 < \frac{11}{23} = 0.478\cdots$ ②

①, ② より, $\log_{10} 3$ の値を小数第 2 位まで求めると 0.47 **答**

第5章 章末問題A

教 p.179

1. 次の式を計算せよ。

(1) $64^{\frac{2}{3}} \times 16^{-\frac{1}{4}}$

(2) $\sqrt[3]{9} \times \sqrt[6]{9} \div \sqrt[4]{27}$

指針 指数法則と計算

(1) まず、64や16を素因数分解して、同じ数の累乗の形で表してから指数法則を適用する。

(2) 有理数の指数を使って書き改めてから指数法則を適用する。

解答 (1) $64^{\frac{2}{3}} \times 16^{-\frac{1}{4}} = (2^6)^{\frac{2}{3}} \times (2^4)^{-\frac{1}{4}}$

$$= 2^4 \times 2^{-1} = 2^{4+(-1)} = 2^3 = 8 \quad \text{答}$$

(2) $\sqrt[3]{9} \times \sqrt[6]{9} \div \sqrt[4]{27} = \sqrt[3]{3^2} \times \sqrt[6]{3^2} \div \sqrt[4]{3^3}$

$$= 3^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}} \div 3^{\frac{3}{4}}$$

$$= 3^{\frac{2}{3} + \frac{1}{3} - \frac{3}{4}} = 3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3} \quad \text{答}$$

教 p.179

2. 次の不等式を満たす x の値の範囲を求めよ。

(1) $\frac{1}{2} \leq 2^x \leq 8$

(2) $1 \leq 0.5^x \leq 4$

指針 指数関数の特徴 それぞれ、指数関数 $y=2^x$ 、 $y=0.5^x$ で考える。 $2^{\square} \leq 2^x \leq 2^{\square}$ 、 $0.5^{\square} \leq 0.5^x \leq 0.5^{\square}$ の形に変形し、増加関数であるか減少関数であるかによって、 x の値の範囲を求める。解答 (1) 不等式を変形すると $2^{-1} \leq 2^x \leq 2^3$ 底2は1より大きいから $-1 \leq x \leq 3$ 答

(2) $1=0.5^0$ 、 $4=2^2=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right\}^2=0.5^{-2}$

不等式を変形すると $0.5^0 \leq 0.5^x \leq 0.5^{-2}$ 底0.5は1より小さいから $0 \geq x \geq -2$ すなわち $-2 \leq x \leq 0$ 答

教 p.179

3. 次の方程式、不等式を解け。

(1) $3^{x+1} = \sqrt[3]{9}$

(2) $8^x \leq 4^{x+1}$

(3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \geq (\sqrt{2})^x$

指針 指数関数を含む方程式、不等式 両辺の底をそろえて、指数を比べる。不等式は底が1より大きい、1より小さい正の数かにより、不等号の向きに注意することが必要となる。

5章

指数関数と対数関数

解答 (1) 方程式を変形すると $3^{x+1} = 3^{\frac{2}{3}}$
 $x+1 = \frac{2}{3}$ から $x = -\frac{1}{3}$ 答

$$\leftarrow \sqrt[3]{9} = 9^{\frac{1}{3}} = (3^2)^{\frac{1}{3}}$$

(2) 不等式を変形すると $2^{3x} \leq 2^{2(x+1)}$
 底 2 は 1 より大きいから $3x \leq 2(x+1)$
 これを解いて $x \leq 2$ 答

(3) 不等式を変形すると $2^{-(x-1)} \geq 2^{\frac{1}{2}x}$
 底 2 は 1 より大きいから $-(x-1) \geq \frac{1}{2}x$

これを解いて $x \leq \frac{2}{3}$ 答

注意 (3) 底を $\frac{1}{2}$ にそろえると, $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ より $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}x}$

底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいから $x-1 \leq -\frac{1}{2}x$ となる。

教 p.179

4. 次の式を計算せよ。

(1) $\frac{1}{2} \log_5 3 + 3 \log_5 \sqrt{2} - \log_5 \sqrt{24}$

(2) $(\log_2 3 + \log_4 9)(\log_3 4 + \log_9 2)$

指針 対数の性質, 底の変換公式 (1) は対数の性質を使う。 $k \log_a M$ の項はすべて $\log_a M^k$ の形にし, 性質 1, 2 を使って 1 つの対数にまとめる。(2) は底の変換公式で, たとえばすべての対数の底を 2 にそろえる。

解答 (1) $\frac{1}{2} \log_5 3 + 3 \log_5 \sqrt{2} - \log_5 \sqrt{24}$
 $= \log_5 3^{\frac{1}{2}} + \log_5 (\sqrt{2})^3 - \log_5 \sqrt{24} = \log_5 \frac{\sqrt{3} \times 2\sqrt{2}}{\sqrt{24}}$
 $= \log_5 1 = 0$ 答

(2) $(\log_2 3 + \log_4 9)(\log_3 4 + \log_9 2)$
 $= \left(\log_2 3 + \frac{\log_2 9}{\log_2 4} \right) \left(\frac{\log_2 4}{\log_2 3} + \frac{\log_2 2}{\log_2 9} \right)$
 $= \left(\log_2 3 + \frac{2 \log_2 3}{2} \right) \left(\frac{2}{\log_2 3} + \frac{1}{2 \log_2 3} \right)$
 $= 2 \log_2 3 \times \frac{5}{2 \log_2 3} = 5$ 答

5. 次の方程式、不等式を解け。

(1) $\log_{0.5}(x+1)(x+2) = -1$

(2) $\log_3(x-2) + \log_3(2x-7) = 2$

(3) $2\log_{0.5}(3-x) \geq \log_{0.5} 4x$

(4) $\log_3 x + \log_3(x-2) \geq 1$

指針 対数関数を含む方程式、不等式

(1), (2) は $\log_a X = p$ の形から x の方程式 $X = a^p$ を導く。(2) は方程式を変形する前に真数条件を確かめておく。

(3), (4) は真数が正である x の範囲を求める。次に、不等式を $\log_a p < \log_a q$ などの形に変形し、底 a の値に注目して、次のことを使う。

$$a > 1 \quad \text{のとき} \quad \log_a p < \log_a q \iff 0 < p < q$$

$$0 < a < 1 \quad \text{のとき} \quad \log_a p < \log_a q \iff 0 < q < p$$

解答

(1) 方程式を変形すると $(x+1)(x+2) = 0.5^{-1} \quad \leftarrow 0.5^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$

よって $x^2 + 3x = 0$ すなわち $x(x+3) = 0$

したがって $x = 0, -3$ 答

(2) 真数は正であるから

$$x-2 > 0 \quad \text{かつ} \quad 2x-7 > 0$$

すなわち $x > \frac{7}{2}$ …… ①

← 共通範囲

方程式を変形すると

$$\log_3(x-2)(2x-7) = 2$$

よって $(x-2)(2x-7) = 3^2$

整理すると $2x^2 - 11x + 5 = 0$

したがって $(x-5)(2x-1) = 0$

$$\begin{array}{ccc} \leftarrow 1 & \times & -5 \rightarrow -10 \\ 2 & -1 & \rightarrow -1 \\ \hline & 2 & 5 & -11 \end{array}$$

① より $x > \frac{7}{2}$ であるから $x = 5$ 答

(3) 真数は正であるから

$$3-x > 0 \quad \text{かつ} \quad 4x > 0$$

すなわち

$$0 < x < 3 \quad \text{…… ①}$$

不等式を変形すると

$$\log_{0.5}(3-x)^2 \geq \log_{0.5} 4x$$

底 0.5 は 1 より小さいから

$$(3-x)^2 \leq 4x$$

整理すると

$$x^2 - 10x + 9 \leq 0$$

よって

$$(x-1)(x-9) \leq 0$$

これを解くと

$$1 \leq x \leq 9 \quad \text{…… ②}$$

①, ② の共通範囲を求めて

$$1 \leq x < 3 \quad \text{答}$$

(4) 真数は正であるから

$$x > 0 \quad \text{かつ} \quad x-2 > 0$$

すなわち

$$x > 2 \quad \text{…… ①}$$

不等式を変形すると

$$\log_3 x(x-2) \geq \log_3 3$$

底 3 は 1 より大きいから

$$x(x-2) \geq 3$$

整理すると

$$x^2 - 2x - 3 \geq 0$$

よって

$$(x+1)(x-3) \geq 0$$

これを解くと

$$x \leq -1, 3 \leq x \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②の共通範囲を求めて $x \geq 3$ 答**注意** (1) $(x+1)(x+2)=0.5^{-1}>0$ であるから真数条件に触れなくてよい。(2) すぐに方程式を $\log_3(x-2)(2x-7)=2$ と変形して, 2次方程式 $(x-2)(2x-7)=3^2$ すなわち $2x^2-11x+5=0$ を解いて

$$x = \frac{1}{2}, 5 \text{ を求めてから, 問題文の式に } x = \frac{1}{2}, 5 \text{ を代入して,}$$

 $x=5$ のみ適する (真数が正) として求めてもよい。

教 p.179

6. 6^{20} は何桁の数か。ただし, $\log_{10} 2=0.3010$, $\log_{10} 3=0.4771$ とする。**指針** 自然数 N の桁数と常用対数の応用 N の桁数は, 次のように求める。

$$N \text{ が } k \text{ 桁の数} \iff k-1 \leq \log_{10} N < k$$

$$\begin{aligned} \text{解答} \quad \log_{10} 6^{20} &= 20 \log_{10} 6 = 20(\log_{10} 2 + \log_{10} 3) \\ &= 20(0.3010 + 0.4771) \\ &= 15.562 \end{aligned}$$

$$15 < \log_{10} 6^{20} < 16 \text{ であるから} \quad 10^{15} < 6^{20} < 10^{16}$$

よって, 6^{20} は 16 桁の数である。 答

教 p.179

7. 0.4^n が, 小数第3位に初めて0でない数字が現れる小数となるような自然数 n をすべて求めよ。ただし, $\log_{10} 2=0.3010$ とする。**指針** 小数と常用対数の応用 N が小数第3位に初めて0でない数字が現れる小数であるとする

$$0.001 \leq N < 0.01 \quad \text{すなわち} \quad 10^{-3} \leq N < 10^{-2}$$

$$\text{解答} \quad 0.4^n \text{ が, 小数第3位に初めて0でない数字が現れる小数であるとする} \\ 10^{-3} \leq 0.4^n < 10^{-2}$$

$$\text{常用対数をとると} \quad \log_{10} 10^{-3} \leq \log_{10} 0.4^n < \log_{10} 10^{-2}$$

$$\text{すなわち} \quad -3 \leq n \log_{10} 0.4 < -2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{ここで} \quad \log_{10} 0.4 = \log_{10} \frac{4}{10} = \log_{10} 4 - \log_{10} 10$$

$$= \log_{10} 2^2 - \log_{10} 10 = 2 \log_{10} 2 - 1$$

$$= 2 \times 0.3010 - 1 = -0.398$$

よって, ①の各辺を $\log_{10} 0.4 < 0$ で割ると

$$-\frac{3}{\log_{10} 0.4} \geq n > -\frac{2}{\log_{10} 0.4} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$-\frac{3}{\log_{10} 0.4} = \frac{3}{0.398} = 7.5\cdots, \quad -\frac{2}{\log_{10} 0.4} = \frac{2}{0.398} = 5.02\cdots$$

したがって、②は $7.5\cdots \geq n > 5.02\cdots$

これを満たす自然数 n は $n=6, 7$ 答

教 p.179

8. ある菌は、30 分ごとにその個数が 2 倍に増えるという。菌の個数がある時点の 10 万倍を超えるのは、その時点から何時間後か。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ とし、答えは整数で求めよ。

指針 常用対数の応用 x を正の実数として、 x 時間後の菌の量を x を使って表す。不等式を作り、常用対数をとって解く。10 万倍のように桁数の大きい量を扱うには常用対数を利用するとよい。

解答 ある時点から x 時間後に、菌はもとの 2^{2x} 倍に増えている。

x 時間後に 10 万倍を超えるとすると

$$2^{2x} > 100000$$

両辺の常用対数をとると

$$\log_{10} 2^{2x} > \log_{10} 10^5$$

$$2x \times \log_{10} 2 > 5$$

$$\text{よって} \quad x > \frac{5}{2 \log_{10} 2} = \frac{5}{2 \times 0.3010} = 8.3\cdots$$

したがって、10 万倍を超えるのは 9 時間後 答

5 章

指数関数と対数関数

第5章 章末問題B

教 p.180

9. $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = 3$ のとき、次の式の値を求めよ。

(1) $x + x^{-1}$

(2) $x^2 + x^{-2}$

指針 指数関数を含む式の値

(1) $x + x^{-1} = (x^{\frac{1}{2}})^2 + (x^{-\frac{1}{2}})^2$ であるから、まず与えられた等式の両辺を2乗する。 $a^r a^{-r} = a^{r+(-r)} = a^0 = 1$ となることに注意する。

(2) $x^2 + x^{-2} = x^2 + (x^{-1})^2$ であるから、まず(1)で得られた等式の両辺を2乗する。

解答 (1) $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = 3$ の両辺を2乗すると

$$(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})^2 = 9$$

$$\text{よって} \quad (x^{\frac{1}{2}})^2 + 2x^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}} + (x^{-\frac{1}{2}})^2 = 9$$

$$\text{すなわち} \quad x + 2 + x^{-1} = 9$$

$$\text{したがって} \quad x + x^{-1} = 9 - 2 = 7 \quad \text{答}$$

(2) (1) から $x + x^{-1} = 7$

この等式の両辺を2乗すると

$$(x + x^{-1})^2 = 49$$

$$\text{よって} \quad x^2 + 2xx^{-1} + (x^{-1})^2 = 49$$

$$\text{すなわち} \quad x^2 + 2 + x^{-2} = 49$$

$$\text{したがって} \quad x^2 + x^{-2} = 49 - 2 = 47 \quad \text{答}$$

教 p.180

10. 次の関数の値域を求めよ。

(1) $y = 2^{x+1} \quad (-3 \leq x \leq 3)$

(2) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x + \sqrt{2}) \quad (0 \leq x \leq \sqrt{2})$

指針 指数関数、対数関数の値域 底の値から増加関数か減少関数かを判断する。増加関数であれば x の値が大きいくほど y の値も大きく、減少関数であれば x の値が大きいくほど y の値は小さくなる。

解答 (1) $y = 2^{x+1}$ は増加関数であるから

← 底2は1より大きい

$$-3 \leq x \leq 3 \text{ のとき}$$

$$2^{-3+1} \leq y \leq 2^{3+1}$$

$$\text{すなわち} \quad 2^{-2} \leq y \leq 2^4$$

$$\text{よって} \quad \frac{1}{4} \leq y \leq 16 \quad \text{答}$$

(2) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x + \sqrt{2})$ は減少関数であるから

$$0 \leq x \leq \sqrt{2} \text{ のとき}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{2} + \sqrt{2}) \leq y \leq \log_{\frac{1}{2}}(0 + \sqrt{2})$$

すなわち $\log_{\frac{1}{2}} 2\sqrt{2} \leq y \leq \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2}$

$$\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2} = \log_{\frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{2}} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} 2\sqrt{2} = \log_{\frac{1}{2}} (\sqrt{2})^3 = 3 \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2} = -\frac{3}{2}$$

であるから、求める値域は

$$-\frac{3}{2} \leq y \leq -\frac{1}{2} \quad \text{答}$$

教 p.180

11. 次の式を簡単にせよ。

(1) $2^{\log_2 3}$

(2) $100^{\log_{10} \sqrt{2}}$

指針 指数に対数を含む式の値 (1) $x = 2^{\log_2 3}$ (2) $x = 100^{\log_{10} \sqrt{2}}$ とおき、次の関係を用いて、等式を変形する。

1 $M = a^b \iff \log_a M = b$

2 $b = q \iff \log_a b = \log_a q$

解答 (1) $x = 2^{\log_2 3}$ とおくと、対数の定義から

$$\log_2 x = \log_2 3$$

よって $x = 3$

すなわち $2^{\log_2 3} = 3$ 答

(2) $x = 100^{\log_{10} \sqrt{2}}$ とおく。

$$\text{右辺} = (10^2)^{\log_{10} \sqrt{2}} = 10^{\log_{10} (\sqrt{2})^2} = 10^{\log_{10} 2}$$

であるから

$$x = 10^{\log_{10} 2}$$

対数の定義から

$$\log_{10} x = \log_{10} 2$$

よって $x = 2$

すなわち $100^{\log_{10} \sqrt{2}} = 2$ 答

教 p.180

12. 関数 $y = \log_2(x-1) + \log_2(5-x)$ の最大値を求めよ。

指針 対数関数を含む関数の最大値 与えられた関数を変形し、 x の変域に注意して y の最大値を求める。

解答 真数は正であるから $x-1 > 0$ かつ $5-x > 0$

すなわち $1 < x < 5$ …… ①

このとき関数は

$$\begin{aligned} y &= \log_2(x-1)(5-x) = \log_2(-x^2 + 6x - 5) \\ &= \log_2\{-(x-3)^2 + 4\} \end{aligned}$$

5章

指数関数と対数関数

①の範囲において、真数は $x=3$ で最大値4をとる。

底2は1より大きいから、このとき y も最大値 $\log_2 4=2$ をとる。

よって、 y は $x=3$ で最大値2をとる。 答

注意 ①を確認せずに、すぐに $y=\log_2\{-(x-3)^2+4\}$ を導いて、 $x=3$ のとき $x-1>0$ 、 $5-x>0$ すなわち、真数が正である条件を満たすことをここで確認してもよい。

教 p.180

13. 0でない実数 x, y, z が $2^x=5^y=10^z$ を満たすとき、次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$$

指針 対数の性質と等式の証明 与えられた条件の式 $2^x=5^y=10^z$ から x, y をそれぞれ z で表し、証明したい等式の左辺を z の式にして、右辺を導くとよい。

解答 $2^x=10^z$ より $z=\log_{10} 2^x=x\log_{10} 2$ よって $x=\frac{z}{\log_{10} 2}$

$5^y=10^z$ より $z=\log_{10} 5^y=y\log_{10} 5$ よって $y=\frac{z}{\log_{10} 5}$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{\log_{10} 2}{z} + \frac{\log_{10} 5}{z} = \frac{\log_{10} 2 + \log_{10} 5}{z} \\ &= \frac{\log_{10} (2 \times 5)}{z} = \frac{\log_{10} 10}{z} = \frac{1}{z} \quad \text{終} \end{aligned}$$

教 p.180

14. 4と $3^{\sqrt{2}}$ の大小を不等号を用いて表せ。ただし、 $\log_{10} 2=0.3010$ 、 $\log_{10} 3=0.4771$ とする。

指針 常用対数の利用と数の大小 $\log_{10} 4$ と $\log_{10} 3^{\sqrt{2}}$ の大小を比べる。また、 $\log_{10} 4=2\log_{10} 2$ 、 $\log_{10} 3^{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\log_{10} 3$ とそれぞれ変形する。

本問では $\log_{10} 2$ 、 $\log_{10} 3$ の近似値は与えられているが、 $\sqrt{2}$ の近似値は与えられていない。 $\sqrt{2} \div 1.414$ として計算してもよいが、ここでは $\sqrt{2}>1.4$ として近似値を直接使わない方法で大小を比較する。

解答 $\log_{10} 4=\log_{10} 2^2=2\log_{10} 2=2 \times 0.3010=0.6020$

$$\log_{10} 3^{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\log_{10} 3$$

$$\sqrt{2}>1.4 \text{ であるから } \sqrt{2}\log_{10} 3>1.4\log_{10} 3=1.4 \times 0.4771=0.66794$$

$$\text{よって} \quad \log_{10} 4<1.4\log_{10} 3<\sqrt{2}\log_{10} 3$$

$$\text{すなわち} \quad \log_{10} 4<\log_{10} 3^{\sqrt{2}}$$

$$\text{底 } 10 \text{ は } 1 \text{ より大きいから} \quad 4<3^{\sqrt{2}} \quad \text{答}$$

15. $M = \sqrt[3]{9}$ とする。常用対数表を用いて、次の問いに答えよ。

- (1) $\log_{10} M$ の値を、小数第 5 位を四捨五入して小数第 4 位まで求めよ。
 (2) M の近似値を小数第 2 位まで求めよ。

指針 常用対数表の利用 (2) は、(1) で求めた $\log_{10} M$ の値に近い値が常用対数になる数を表からみつける。

解答 (1) 常用対数表より、 $\log_{10} 3 = 0.4771$ であるから

$$\begin{aligned}\log_{10} M &= \log_{10} \sqrt[3]{9} = \log_{10} 9^{\frac{1}{3}} = \log_{10} (3^2)^{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \log_{10} 3 \\ &= \frac{2}{3} \times 0.4771 = 0.31806\cdots \div 0.3181 \quad \text{答}\end{aligned}$$

(2) $\log_{10} M = 0.3181$ となる M の値は、常用対数表より 2.08 答

16. $2^n < 3^{20} < 2^{n+1}$ を満たす自然数 n を求めよ。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

指針 指数関数を含む不等式(常用対数の利用) 底が異なる指数についての不等式であるから、このままでは解決できない。

$3^{20} = 2^x$ を満たす x の値を調べ、不等式 $2^n < 2^x < 2^{n+1}$ を考える。

解答 $3^{20} = 2^x$ とおくと $2^n < 2^x < 2^{n+1}$ …… ①

$3^{20} = 2^x$ の両辺の常用対数をとると

$$\log_{10} 3^{20} = \log_{10} 2^x \quad \text{すなわち} \quad 20 \log_{10} 3 = x \log_{10} 2$$

$$\text{よって} \quad x = \frac{20 \log_{10} 3}{\log_{10} 2} = \frac{20 \times 0.4771}{0.3010} = 31.7\cdots$$

したがって、① から $2^n < 2^{31.7\cdots} < 2^{n+1}$

底 2 は 1 より大きいから $n < 31.7\cdots < n+1$

これを満たす自然数 n は $n = 31$ 答

別解 $2^n < 3^{20} < 2^{n+1}$ の各辺の常用対数をとると

$$\log_{10} 2^n < \log_{10} 3^{20} < \log_{10} 2^{n+1}$$

すなわち

$$n \log_{10} 2 < 20 \log_{10} 3 < (n+1) \log_{10} 2$$

$n \log_{10} 2 < 20 \log_{10} 3$ から

$$n < \frac{20 \log_{10} 3}{\log_{10} 2} = \frac{20 \times 0.4771}{0.3010} \div 31.7$$

$20 \log_{10} 3 < (n+1) \log_{10} 2$ から

$$n > \frac{20 \log_{10} 3}{\log_{10} 2} - 1 \div 30.7$$

よって、求める自然数 n は $n = 31$ 答